Der Hautpsatz der Differential- und Integralrechnung
Ein präformaler Beweis mit GeoGebra-Visualisierung

Peter Stender

2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Beweis erster Teil **3**

3 Beweis zweiter Teil **5**

4 Die Rolle von „$+c$“ **9**

1 Einleitung

Der Hautpsatz der Differential- und Integralrechnung bildet die Grundlage für die Integration nicht nur in der Schulmathematik. Der Hauptsatz besagt anschaulich, dass Integration und Ableitung zueinander inverse Operationen sind[1]. Dadurch kann viel Wissen aus der Differentialrechnung auf die Integralrechnung übertragen werden - wenn man Ableiten kann, ist Integralrechnung eben „Rückwärtsableiten“.

Verallgemeinerung für Lehrende: Liegt ein Operator O vor, der Elemente einer Menge in eine zweite Menge abbildet, und gibt es eine Vermutung, dass ein zweiter Operator O^{-1} der Umkehroperator zu O ist, so gelingt der Beweis der Vermutung mit zwei Beweisschritten:

$$O \circ O^{-1} = id \tag{1}$$

$$O^{-1} \circ O = id \tag{2}$$

Dabei ist id die identische Abbildung, d.h. die Hintereinanderausführung der beiden Operationen ergibt *unabhängig von der Reihenfolge* wieder die Eingabe (im Fall des Hauptsatzes durch der Ableitung „$+c$“). In der klassischen Theorie des Hauptsatzes wird nur der Fall „erst Integrieren, dann Ableiten“ betrachtet, da hier die Integrationskonstante auch formal irrelevant ist. Praktisch werden aber beide Denkrichtungen verwenden (eben mit „$+c$“) und sind für ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge auch hilfreich.

> *Mathematik treiben heißt, dasselbe immer wieder anders hinzuschreiben, so lange bis man Repräsentationen gefunden hat, aus deren Vergleich man neue Einsichten gewinnt.*
>
> *In der Schulmathematik bestehen diese Repräsentationen nicht aus formalen Ausdrücken, sondern aus gelungenen Visualisierungen.*

[1] Diese Aussage ist leider nicht ganz richtig, da beim Ableiten eine Konstante verloren geht, die durch die Integration nicht eindeutig rekonstruiert werden kann – das berühmte $+c$ beim unbestimmten Integral. Diesen Aspekt muss eine Lehrkraft im Blick haben, er ist aber in keiner konkreten Rechnung relevant.

Der Hauptsatz ist in der Universitätsmathematik bewiesen, wobei viele formale Summenausdrücke gepaart mit Grenzwerten hintereinander gereit werden. Für die einzelnen Übergänge zwischen den Darstellungen werden vorher bewiesene Eigenschaften verwendet (Vertauschbarkeit von Grenzwerten, Existenz von Grenzwerten, Mittelwertsatz der Integralrechnung, ...) für die wiederum Voraussetzungen erfüllt sein müssen (Stetigkeit bzw. Differentierbarkeit, Existenz von Grenzwerten – das Ganze geht nicht gut auf $\mathbb{Q}$). Diese Darstellung ist in der Universitätsmathematik unverzichtbar, da es hier darum geht, ein zweifelsfrei korrektes konsistentes formales Gedankengebäude zu formulieren.

Im einem universitären Beweis wird zweifelsfrei klar, *dass* die bewiesene Eigenschaft gilt, die tiefe Einsicht, *warum* die Eigenschaft gilt, wird selten sichtbar. Dies muss jedoch im Zentrum der Schulmathematik stehen, weshalb hier Visualisierungen der Zusammenhänge zentral sind. Im Gegensatz zu den Ansprüchen der Universität können in der Schule technische Details in den Hintergrund treten: diese sind relevant für künftige Mathematikerinnen und Mathematiker, das ist aber nur ein Anteil von ca. 1% der Schülerschaft – für 99% der Schülerschaft verstellen die technischen Details eher das Verständnis - man verliert sich in Kleinigkeiten. Daher wird hier ein präformaler Beweis mit visuellen Aspekten gezeigt, der aus formaler Sicht Lücken aufweist. Lehrkräfte sollten speziell für potentiell künftige Mathematikerinnen und Mathematiker ergänzende Hinweise geben.

2 Beweis erster Teil

In diesem Teil wird zuerst eine Funktion f integriert und dann das Ergebnis abgeleitet. Es wird gezeigt, dass dann f wieder entsteht.

Vorausgesetzt wird ein grundlegendes Verständnis von Ableitung und Integral sowie in die zu zeigende Hypothese:

- Die Ableitung ist der Grenzwert des Differenzenquotienten. Hier genügt ein anschaulicher Grenzwertbegriff.
- Eine mögliche Visualisierung des bestimmten Integrals ist der Flächeninhalt unter einer Funktion zwischen zwei Grenzen.
- Bei der Integration entsteht die gesuchte Funktion mit x als oberer Integralgrenze eines bestimmten Integrals.

Für den Beweis sind unterschiedliche Vorgehensweisen möglich. Man kann sowohl für die Ableitung als auch für das Integral auf die Definitionen zurückgehen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

sowie

$$F(b) = \lim_{\Delta n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \text{ wobei } \Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{4}$$

Einfacher ist jedoch, bei der Hintereinanderausführung nur die zweite Operation mit der Definition zu beschreiben und die zuerst angewendete Operation, also hier die Integration, einfach formal hinzuschreiben und bekannte Eigenschaften des Integrals zu nutzen. Hier benötigt man die Additivität bei disjunkten Integrationsintervallen. Zur Vereinfachung wird als untere Integrationsgrenze $a = 0$ gewählt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt (Universität: „O.B.d.A.“), da das maximal einer seitlichen Verschiebung des Koordinatensystems entspricht.

Formal gilt:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_0^x f(x)dx}{\Delta x} \tag{6}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} \tag{7}$$

Zu zeigen ist nun, das dieser Grenzwert wieder $f(x)$ ergibt. Dies wird in der Datei Hauptsatz1.ggb visualisiert.

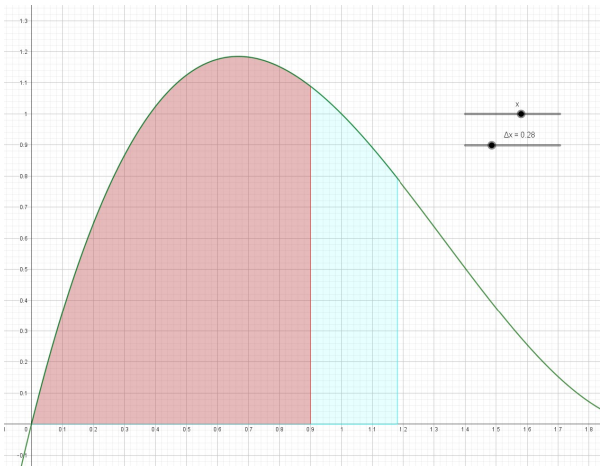

Abbildung 1: Visualisierung der Ausdrücke 6 und 7

Die blaue Fläche in Abbildung 1 ist der Zähler aus Ausdruck 7. Die Breite der blauen Fläche kann mit dem Schieberegler Δx variiert werden und so der Grenzübergang visualisiert werden kann. Dabei entsteht ein immer schmalerer Streifen, der durch ein Rechteck angenähert werden kann. Das Rechteck hat die Breite Δx und eine Höhe zwischen $f(x+\Delta x)$ und $f(x)$ also im Grenzübergang die Höhe $f(x)$. Das Rechteck wird in Abbildung 2 gezeigt.

Ersetzt man in Ausdruck 7 den Zähler durch das Produkt, dass die Rechteckfläche liefert, kann man die Breite der Rechtecksfläche Δx kürzen und im Grenzübergang ent-

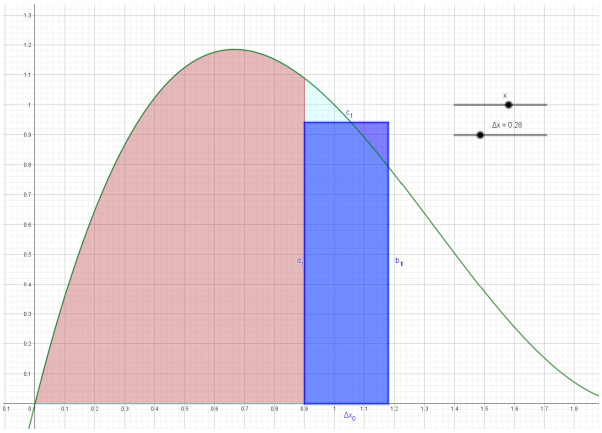

Abbildung 2: Visualisierung mit Rechteck

steht der zu zeigende Wert $f(x)$. Im universitären Beweis wird dieser anschauliche Schritt durch den Mittelwertsatz der Integralrechnung abgesichert. Dieser besagt, dass es zum Integral ein flächengleiches Rechteck gibt mit einer Stelle $a < \xi < b$ und der Höhe $f(\xi)$ des Rechtecks, wenn der Integrand stetig ist. In dieser Veranschaulichung wurde statt ξ der Mittelwert a und b verwendet. Da in der Schule praktisch nur stetige Funktionen untersucht werden (Sprungstellen treten nur in Beispielen auf, die zeigen sollen, dass es noch etwas anderes gibt), können die formalen Voraussetzungen für 99% der Schülerinnen und Schüler vernachlässigt werden – zumal der Satz weitgehend auch bei vielen Sprungstellen gilt, ernste Probleme gibt es erst, wenn die Menge der Sprungstellen Häufungspunkte hat (dann benötigt man das Lesbeques-Integral) – nur der formale Beweis wird wird mit Unstetigkeitsstellen technisch deutlich anspruchsvoller.

3 Beweis zweiter Teil

Der zweite Teil des Beweises basiert auf denselben unterrichtlichen Voraussetzungen wie der erste Teil und der Ansatz ist analog: Man geht aus von der Ableitung f' einer Funktion f und es wird gezeigt, dass durch Integration wieder f entsteht. Ebenfalls analog wird f' formal verwendet und die Integration über den Grenzwert der Summation realisiert. Die Grenzwertberechnung gelingt wiederum auf Grundlage einer Visualisierung in GeoGebra. Betrachtet wird wieder eine Funktion mit $f(0) = 0$ und als untere Integrationsgrenze wird $a = 0$ gewählt.

Zu zeigen ist dann also dass (Summe gemäß Ausdruck 4)

$$f(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f'(i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{b}{n} \tag{8}$$

Als ersten Schritt muss die Bedeutung des Ausdrucks $f'(x) \cdot \Delta x$ verstanden werden, da dieser Ausdruck aufsummiert wird. Dies geschieht in Hauptsatz2.ggb („Einzelbeispiel“

eingeblendet, „l1“ und „l2“ ausgeblendet, Abbildung 3). Die Funktion f hat an der Stelle x_p die Steigung $f'(x_p)$. Am Punkt $(x_p, f(x_p))$ wird ein Steigungsdreieck der Breite Δx angeheftet. Die Höhe des Steigungsdreiecks ist dann die zu verstehende Größe $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ (an der Stelle x_p). Dies lässt sich leicht nachprüfen indem man $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ bestätigt. Für unterrichtliche Zwecke kann x_p mit dem Schieberegler variiert werden. $\Delta x = \frac{b}{n}$ wird über den Schieberegler n variiert.

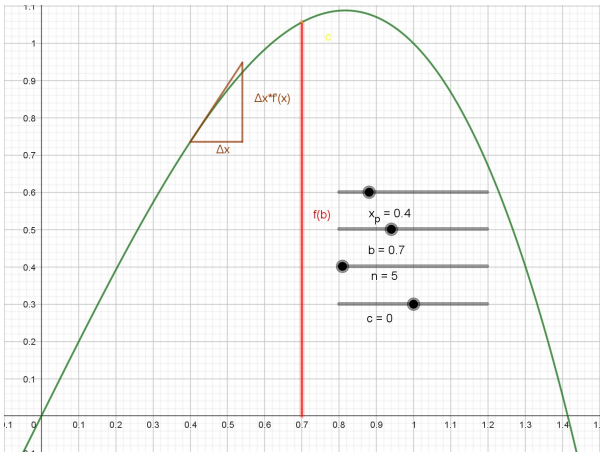

Abbildung 3: Visualisierung des Ausdrucks $f'(x) \cdot \Delta x$

Für die Summe in Ausdruck 8 müssen also die Δy_i von n Steigungsdreiecken summiert werden. Diese werden in „l1“ gezeigt („l1“ einblenden, „Einzelbeispiel“ ausblenden, Abbildungen 4 und 5).

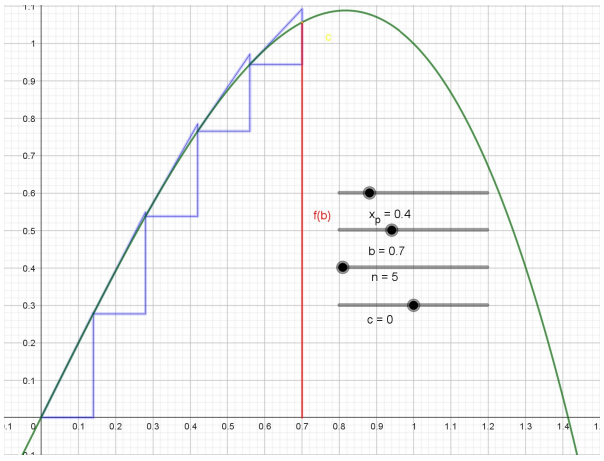

Abbildung 4: Visualisierung $n = 5$ mal $f'(x_i) \cdot \Delta x$

Eine genaue Betrachtung der Abbildungen 4 und 5 liefert die folgenden Einsichten:

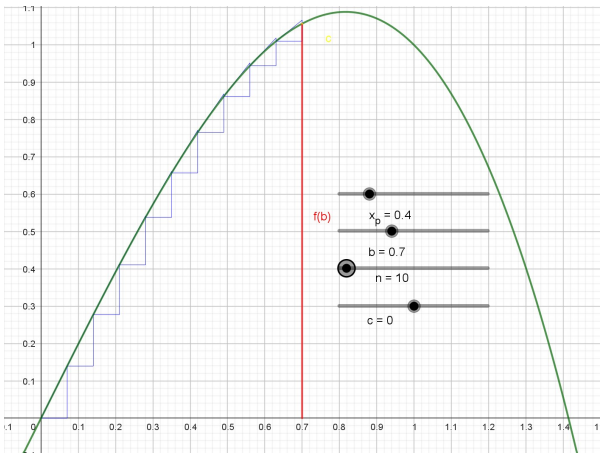

Abbildung 5: Visualisierung $n = 10$ mal $f'(x_i) \cdot \Delta x$

- Die Dreiecke passen nicht so zueinander, dass die linke untere Ecke des nächsten Dreiecks an die obere Ecke des vorangehenden Dreicks anschließt. Für die zu berechnende Summation sollten die Dreiecke „aneinander anschließen“.
- Um den Wert $f(b)$ zu rekonstruieren sind die Δy insgesamt zu groß. Die Dreieckshöhen „stehen über“.
- Die genannten Unstimmigkeiten werden mit wachsendem n kleiner. Mit dem Schieberegler wird dieser Effekt in GeoGebra für größere n sehr deutlich. Eine Annäherung der Summe an $f(b)$ wird gut sichtbar.

Das erste Problem wird durch eine weitere Visualisierung behoben („l1“ ausblenden, „l2“ einblenden, Abbildung 6 und 7). Jetzt stellen die Steigungsdreiecke die Summe der $\Delta y_i = f'(i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ sinnvoll dar, da sie „aneinander anschließen“. Mit dem Schieberegler für n wird deutlich, wie die Summe gegen $f(b)$ konvergiert (Übergang von Abbildung 6 zu Abbildung 7). Dies ist die zentrale Idee der Integration, wie sie in dem Konzept „Von der Änderungsrate zum Bestand“ angelegt ist: der Bestand $f(b)$ wird durch Summation von durchschnittlichen Änderungen $\Delta y_i = f'(i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ rekonstruiert und im Grenzübergang exakt erreicht. An dieser Stelle wird außerdem gut deutlich, dass Integrale nicht immer Flächeninhalte sind: hier werden Strecken summiert!

Mit dem Schieberegler für b zeigt man, dass mit dieser Konstruktion die ganze Funktion f rekonstruiert werden kann.

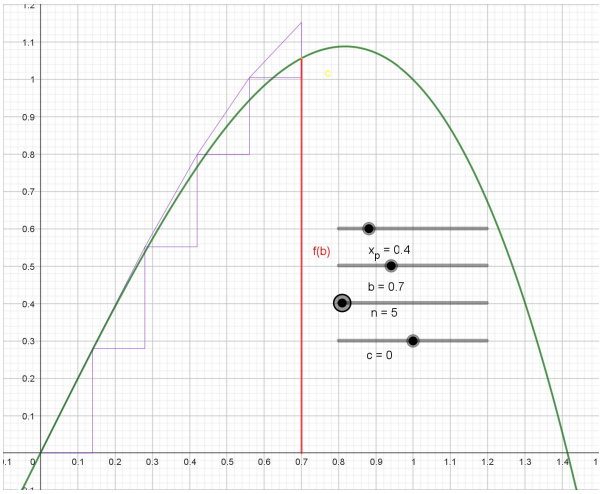

Abbildung 6: Visualisierung $n = 5$ mal $f'(x_i) \cdot \Delta x$ mit für die Summation richtiger Position der Dreiecke

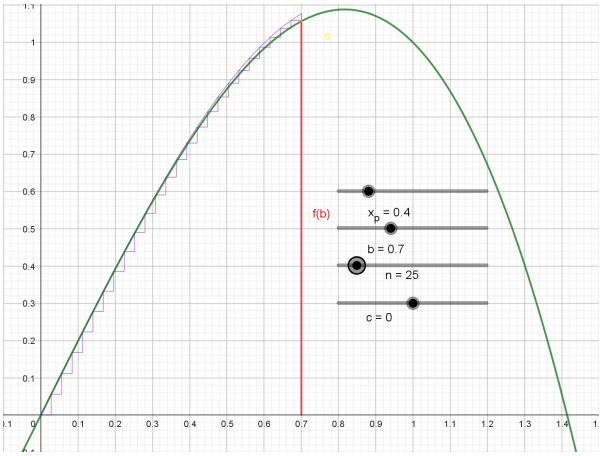

Abbildung 7: Visualisierung $n = 25$ mal $f'(x_i) \cdot \Delta x$ mit für die Summation richtiger Position der Dreiecke

Mathematische Anmerkung: Die Rechnung und die Visualisierung entsprechen dem einfachsten Verfahren zu nummerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen: Die Kurve wird stückweise durch Tangenten angenähert (explizites Euler-Verfahren). Das gut bekannte Problem dieses Näherungsverfahrens wird auch sichtbar: „man fliegt aus der Kurve“, das explizite Euler-Verfahren unterschätzt (bzw. ignoriert) die Krümmung. Dafür müsste man die zweite Ableitung heranziehen oder Zwischenwerte von f' im Intervall Δx.

4 Die Rolle von „$+c$“

Die Rekonstruktion der Funktion f gelingt im vorigen Abschnitt nur, weil $f(a) = 0$ gewählt worden ist. Verschiebt man f mit dem Schieberegler c in Richtung der y-Achse (Abbildung 8), bewegt sich f, die Rekonstruktion von f mit den Dreiecken bleibt aber, wo sie ist. Der Grund hierfür ist gut bekannt: Die Ableitungen von f und $f + c$ sind identisch und beim Rückwärtsableiten kann das „c“ nicht rekonstruiert werden.

Abbildung 8 visualiert dabei auch, dass $c = f(a)$ sein muss - der „Startwert“ der Integration. Dies ist auch formal gut an der klassische Darstellung für das bestimmte Integral einzusehen (hier wird f integriert und nicht wie oben f', daher entsteht F):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \Leftrightarrow \tag{9}$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + F(a) \tag{10}$$

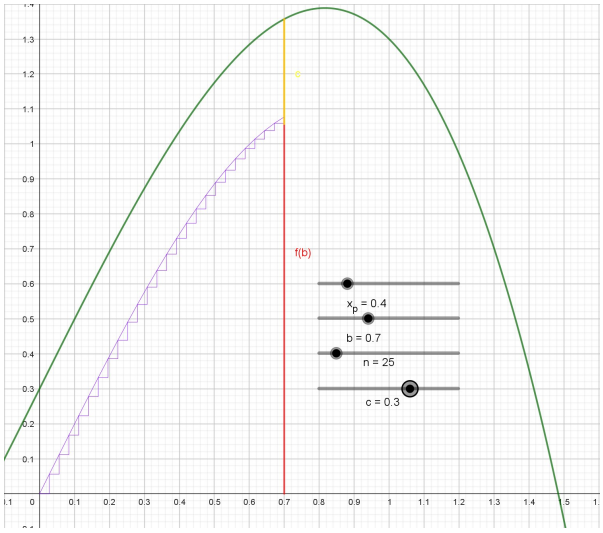

Abbildung 8: Visualisierung $f(x) + c$

Da beim Integrieren in der Regel nicht wie in Abschnitt 2 eine bereits bekannt Funktion rekonstruiert wird, ist $F(a)$ nicht eindeutig bestimmt, dies wird durch üblicherweise ausgedrückt, indem „$+c$“ an die berechnete Rückwärtsableitung angefügt wird.

Dieser Sachverhalt bedeutet aber auch, dass die Stammfunktion nicht *eine* Funktion ist, sondern einen *Funktionenschaar* – zu jedem $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion, die Gleichung 9 erfüllt. Das wird sprachlich in der Schulmathematik oft nicht abgebildet. Obwohl das „$+c$“ eigentlich nur dazu dient, eine formal Darstellung zu erreichen, wird der formale Kern dann nicht sachgerecht behandelt. Außerhalb der Aufgabenstellung „Stammfunktion bestimmen“ hat das „$+c$“ keinerlei Relevanz, da alle Anwendungen

der Integration letztlich Gleichung 9 verwenden: entweder werden bestimmte Integrale berechnet oder Funktionen von der oberen Grenze bei gegebener unter Grenze. Letzteres entspricht Gleichung 10.

Kann man auf das „+c“ beim „Stammfunktion bestimmen“ verzichten?

Die Antwort hängt von der exakten Fragestellung ab. Hier gibt es drei Möglichkeiten:

1. Frage: Bestimmen Sie *eine* Stammfunktion zu f.
   In diesem Fall dürfen Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden, welche Stammfunktion sie angeben und können dementsprechend die Funktion mit $c = 0$ wählen, also kann das „+c“ entfallen.

2. Frage: Bestimmen Sie *die* Stammfunktion zu f.
   In diesem Fall müssen Schülerinnen und Schüler korrekt antworten: Die Frage ist falsch, da es unendlich viele Stammfunktionen gibt, kann *die* Stammfunktion nicht angegeben werden. (Analog wäre eine „falsche Frage“: Bestimme *die* Lösung zu $x^2 = 4$ mit $x \in \mathbb{R}$, für die es keine sinnvolle Antwort gibt).

3. Frage: Bestimmen Sie *alle* Stammfunktionen zu f.
   In diesem Fall müssen Schülerinnen und Schüler die ganze Funktionenschaar angeben. Nach dem oben gesagten ist aber unklar, wofür man *alle* Stammfunktionen benötigt.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die inhaltliche Thematisierung des Sachverhaltes, dass beim Rückwärtsableiten eine Konstante nicht eindeutig bestimmt werden kann, sinnvoll und wichtig ist. Diese gelingt beispielsweise mit der oben verwendeten Visualisierung. Ebenso muss thematisiert werden, dass dies bei der Bestimmung von bestimmten Integralen irrelevant ist und in konkreten Rechnungen daher ignoriert werden kann. In Übungen zur Bestimmung von Stammfunktionen fragt man nach *einer* Stammfunktion und vermeidet so die wiederholte, zeitraubende aber nutzlose Debatte, dass da ja noch „+c“ fehlt.